

Условные математические ожидания. Лекции по курсу «Статистическое моделирование»

В.В. Некруткин, 2012

Содержание

1	Определение и простейшие свойства	1
2	УМО относительно отображений и функция регрессии	3
3	Предельный переход под знаком УМО	5
4	Дальнейшие свойства УМО	7
5	УМО как оператор проектирования. Условная дисперсия	10
6	Регулярные варианты условных распределений	13
7	Теорема о монотонном классе. Применение к УМО	15

1 Определение и простейшие свойства

Определение 1.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — некоторое вероятностное пространство и $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ — σ -алгебра, содержащаяся в $\mathcal{F}$. Пусть, кроме того, $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$ — случайная величина с конечным математическим ожиданием.

Случайная величина ξ' называется *условным математическим ожиданием*¹ ξ относительно² σ -алгебры $\mathcal{F}_0$, если, во-первых, ξ' измерима относительно $\mathcal{F}_0$ и, во-вторых, для любого $A \in \mathcal{F}_0$

$$\int_A \xi' d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P}. \quad (1.1)$$

Стандартным обозначением для УМО относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_0$ является $\xi' = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$.

В случае, когда $\xi = \mathbb{I}_A$ с $A \in \mathcal{F}$, вместо $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$ пишут $\mathbb{P}(A | \mathcal{F}_0)$ и говорят об *условной вероятности события A при условии $\mathcal{F}_0$* .

Докажем теорему существования и единственности условных математических ожиданий.

Теорема 1.1. Условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$ существует и единственно $\mathbb{P}$ -п.в.

Доказательство. Нужно нам утверждение сразу же следует из теоремы Радона-Никодима. Действительно, рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ и положим $\nu(A) = \int_A \xi d\mathbb{P}$ при $A \in \mathcal{F}_0$.

Ясно, что ν является конечным зарядом и что $\nu \prec \mathbb{P}$. Поэтому, согласно Теореме Радона-Никодима, существует такая $\mathcal{F}_0$ -измеримая функция ξ' , что $\nu(A) = \int_A \xi' d\mathbb{P}$. Из этой же теоремы следует, что ξ' единственна с точностью до $\mathcal{F}_0$ -измеримых множеств $\mathbb{P}$ -меры ноль. $\square$

¹Сокращенно — УМО

²или — «при условии»

Замечание 1.1. Отметим, что, в отличие от обычного математического ожидания, условное математическое ожидание является случайной величиной, то есть функцией $\omega \in \Omega$ (не обязательно постоянной). Более того, эта функция не является единственной, и поэтому можно говорить об УМО как о классе эквивалентных случайных величин (например, как об элементе $\mathbb{L}^1(d\mathbb{P})$), а не как об одном каком-то представителе этого класса.

Приведем несколько простейших примеров УМО относительно различных σ -алгебр $\mathcal{F}_0$.

1. (минимальная σ -алгебра $\mathcal{F}_0$). Если $\mathcal{F}_0 = (\Omega, \emptyset)$, то $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}\xi$. Действительно, любая постоянная измерима относительно $\mathcal{F}_0$, а при $A = \Omega$ или $A = \emptyset$, очевидно,

$$\int_A \mathbb{E}\xi d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P}.$$

2. (максимальная σ -алгебра $\mathcal{F}_0$). Если $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, то $\mathbb{P}$ -п.в. $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) = \xi$. Здесь ξ по определению измерима относительно $\mathcal{F}_0$, а условие (1.1) при подстановке $\xi' = \xi$ превращается в тождество.
3. (дискретная σ -алгебра $\mathcal{F}_0$). Возьмем $\mathcal{F}_0 = (\Omega, A, A^C, \emptyset)$, где $A \in \mathcal{F}$ и $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(A^C) > 0$. Тогда³

$$\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A \xi d\mathbb{P} & \text{при } \omega \in A, \\ \frac{1}{\mathbb{P}(A^C)} \int_{A^C} \xi d\mathbb{P} & \text{при } \omega \in A^C. \end{cases}$$

Приведем несколько простейших свойств УМО. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ — σ -алгебра и ξ, η — случайные величины с конечными математическими ожиданиями.

Предложение 1.1. (Простейшие свойства УМО).

1. Если $\xi = c = \text{const}$, то $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) = c$ почти всюду по мере $\mathbb{P}$.
2. Для любых постоянных a, b

$$\mathbb{E}(a\xi + b\eta | \mathcal{F}_0) = a\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) + b\mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (1.2)$$

3. Если $\xi \geq 0$, то $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) \geq 0$ с вероятностью 1.
4. Если $\xi \geq \eta$, то $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) \geq \mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0)$ с вероятностью 1.
5. $\mathbb{E}(|\xi| | \mathcal{F}_0) \geq |\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)|$ с вероятностью 1.
6. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}\xi$.

Доказательство. 1. Постоянная c , конечно же, измерима относительно $\mathcal{F}_0$. Постановка $\xi' = \xi = c$ в (1.1) завершает доказательство.

2. Обозначим $\zeta = a\xi + b\eta$ и $\zeta' = a\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) + b\mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0)$. Тогда при $A \in \mathcal{F}_0$

$$\int_A \zeta' d\mathbb{P} = a \int_A \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) d\mathbb{P} + b \int_A \mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0) d\mathbb{P} = a \int_A \xi d\mathbb{P} + b \int_A \eta d\mathbb{P} = \int_A \zeta d\mathbb{P}.$$

Осталось заметить, что ζ' измерима относительно $\mathcal{F}_0$.

3. Обозначим $\xi' = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$ и положим $A = \{\omega : \xi' < 0\}$. Пусть $\mathbb{P}(A) > 0$. Тогда

$$0 > \int_A \xi' d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P},$$

что противоречит неотрицательности ξ .

4. Доказательство сводится к рассмотрению случайной величины $\beta = \xi - \eta$ и последовательному применению пунктов 3 и 2 настоящего Предложения.

5. Следует из того, что $|\xi| \geq \xi$ и $|\xi| \geq -\xi$ с дальнейшим применением п. 4 Предложения.

6. Непосредственно сводится к (1.1) выбором $A = \Omega$. □

³Проверьте!

Замечание 1.2. Отметим, что пункты 1 – 5 Предложения 1.1 аналогичны соответствующим свойствам математических ожиданий, то есть интегралов. В дальнейшем мы увидим, что это не является случайным совпадением. Шестой пункт, конечно, имеет другую природу.

2 УМО относительно отображений и функция регрессии

Вернемся к определению условных математических ожиданий. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и суммируемую случайную величину ξ , определенную на этом пространстве. Кроме того, введем отображение $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$, где $(D, \mathcal{A})$ — некоторое измеримое пространство.

Отображение T порождает σ -алгебру $\sigma(T) \subset \mathcal{F}$, которая определяется равенством $\sigma(T) = \{T^{-1}B, B \in \mathcal{A}\}$. Выбрав $\mathcal{F}_0 = \sigma(T)$, можно рассматривать УМО $\mathbb{E}(\xi | \sigma(T))$ относительно σ -алгебры $\sigma(T)$, которое обозначается $\mathbb{E}(\xi | T)$ и называется *условным математическим ожиданием ξ относительно отображения T* .

Замечание 2.1. Заметим, что любая σ -алгебра $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ порождается измеримым отображением $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\Omega, \mathcal{F}_0)$ таким, что $T(\omega) = \omega$. Поэтому понятия УМО относительно σ -алгебры и УМО относительно отображения эквивалентны.

Обозначение $\mathbb{E}(\xi | T)$ обретает содержательный смысл благодаря следующему утверждению.

Лемма 2.1. Пусть $(D, \mathcal{A})$ — некоторое измеримое пространство, $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$ и σ -алгебра $\mathcal{F}_0 = \sigma(T)$ порождена отображением T .

1. Для того, чтобы случайная величина $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$ была измерима относительно $\sigma(T)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $g : (D, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$, что $\xi = g \circ T$.

2. Пусть $\xi = g \circ T$, $\xi_1 = g_1 \circ T$ и $\xi_1 = \xi$ н.в. по мере $\mathbb{P}$. Тогда $g_1 = g$ н.в. по мере $\mathcal{P}_T$.

Доказательство. 1. В части достаточности утверждение очевидно. Для доказательства необходимости предположим сначала, что ξ является простой $\sigma(T)$ -измеримой функцией, то есть что

$$\xi = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{I}_{A_i},$$

где $A_i \in \sigma(T)$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда $A_i = T^{-1}B_i$, где $B_i \in \mathcal{A}$, причем множества B_i можно выбрать попарно непересекающимися.⁴

Положим $B = \cup_i B_i$ и определим функцию g равенством

$$g(t) = \begin{cases} c_i & \text{при } t \in B_i, \\ 0 & \text{при } t \in D \setminus B. \end{cases}$$

Тогда

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{I}_{T^{-1}B_i}(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{I}_{B_i}(T\omega) = g(T\omega).$$

Перейдем к общему случаю. Представим ξ в виде поточечного предела простых $\sigma(T)$ -измеримых случайных величин ξ_n , каждая из которых согласно доказанному имеет вид $\xi_n = g_n \circ T$.

Положим

$$D_0 = \left\{ t \in D : \text{существует конечный предел } \lim_n g_n(t) \right\}$$

⁴Проверьте!

и определим функцию $g : (D, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$ равенством

$$g(t) = \begin{cases} \lim_n g_n(t) & \text{при } t \in D_0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как при любом ω последовательность $g_n(T\omega)$ имеет предел, равный $\xi(\omega)$, то $T\omega \in D_0$ для любого $\omega \in \Omega$. Поэтому $\xi(\omega) = \lim_n g_n(T\omega) = g(T\omega)$.

2. Второе утверждение леммы вытекает из цепочки равенств

$$\int_B g d\mathcal{P}_T = \int_{T^{-1}B} \xi d\mathbb{P} = \int_{T^{-1}B} \xi_1 d\mathbb{P} = \int_B g_1 d\mathcal{P}_T,$$

выполняющейся для любого $B \in \mathcal{A}$. □

Согласно Лемме 2.1 условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно отображения $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$ имеет вид

$$E(\xi | T)(\omega) = g(T\omega),$$

где функция $g : (D, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$ называется *функцией регрессии ξ на T* и обычно обозначается как $g(t) = \mathbb{E}(\xi | T = t)$.

Замечание 2.2. Это обозначение имеет прозрачную интерпретацию. Предположим, что нас интересует совместное поведение результатов двух измерений величин ξ и T в некотором случайном эксперименте, причем T доступно непосредственному наблюдению, а ξ — нет.

Тогда величину $\mathbb{E}(\xi | T = t)$ можно понимать как среднее значение ξ при условии, что T приняло значение t (см. ниже Пример 2.1). Такая интерпретация часто делает естественными более сложные свойства УМО.

Определение 1.1 и Теорема 1.1 для случая $\mathcal{F}_0 = \sigma(T)$ легко переформулируются на языке функции регрессии. Действительно, так как при $B \in \mathcal{A}$

$$\int_{T^{-1}B} g(T) d\mathbb{P} = \int_B g d\mathcal{P}_T,$$

то (1.1) превращается в равенство

$$\int_{T^{-1}B} \xi d\mathbb{P} = \int_B g d\mathcal{P}_T, \tag{2.1}$$

а Теорема 1.1 (вместе со вторым пунктом Леммы 2.1) утверждает, что функция g , для которой (2.1) выполняется для любого $B \in \mathcal{A}$, существует и единственна $\mathcal{P}_T$ -почти всюду.

Таким образом, чтобы найти условное математическое ожидание $\xi' = \mathbb{E}(\xi | T)$ относительно отображения T , достаточно найти такую функцию $g : (D, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$, для которой выполняются равенства (2.1), а затем положить $\xi' = g \circ T$.

Опишем 2 ситуации, когда можно явно выписать вид функции регрессии.

Пример 2.1. (Примеры вычисления функций регрессии)

1. (*Случай дискретного T*). Пусть $D = \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ является конечным или счетным множеством, а σ -алгебра $\mathcal{A}$ состоит из всех подмножеств множества D . Обозначим $A_i = \{\omega : T\omega = t_i\}$ и предположим дополнительно, что $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Тогда

$$g(t_i) = \mathbb{E}(\xi | T = t_i) = \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int_{A_i} \xi d\mathbb{P}. \tag{2.2}$$

Для доказательства достаточно проверить равенство (2.1) для $B = \{t_i\}$. Тогда

$$\int_B g d\mathcal{P}_T = g(t_i)\mathbb{P}(A_i) = \int_{A_i} \xi d\mathbb{P},$$

что и требовалось доказать.

2. (Случай абсолютно непрерывного (ξ, T)). Пусть совместное распределение ξ, T имеет производную Радона-Никодима (иначе говоря, совместную плотность) $p(x, t)$ относительно меры $\mu(dx) \otimes \nu(dt)$, определенной на σ -алгебре $\mathcal{B}_R \times \mathcal{A}$ подмножеств множества $\mathbb{R} \times D$. Обозначим

$$p_T(t) = \int_{\mathbb{R}} p(x, t)\mu(dx).$$

Тогда

$$\mathbb{E}(\xi | T = t) = \begin{cases} \frac{\int_{\mathbb{R}} xp(x, t)\mu(dx)}{p_T(t)} & \text{если } p_T(t) \neq 0, \\ 0 & \text{если } p_T(t) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Докажем равенство (2.3). Обозначим $D_0 = \{t : p_T(t) \neq 0\}$. Поскольку, как нетрудно видеть, $p_T = d\mathcal{P}_T/d\nu$, то $\mathcal{P}_T(D_0) = \mathbb{P}(T \in D_0) = 1$.

Поэтому для любого $B \in \mathcal{A}$ интеграл по множеству B от правой части (2.3) имеет вид

$$\int_{B \cap D_0} \nu(dt) \int_{\mathbb{R}} xp(x, t)\mu(dx) = \mathbb{E}(\xi, T \in B \cap D_0) = \mathbb{E}(\xi, T \in B) = \int_{T^{-1}B} \xi d\mathbb{P}.$$

Тем самым (2.3) доказано.⁵

Утверждения Предложения 1.1 легко переформулируются в терминах функции регрессии. Например, вместо (1.2) мы будем иметь равенство.

$$\mathbb{E}(a\xi + b\eta | T = t) = a\mathbb{E}(\xi | T = t) + b\mathbb{E}(\eta | T = t) \quad \mathcal{P}_T\text{-п.в.}$$

Аналогично переписываются неравенства пп. 3 – 5 Предложения. Что касается тождества шестого пункта, то оно приобретет вид⁶

$$\mathbb{E}\xi = \int_D \mathbb{E}(\xi | T = t) \mathcal{P}_T(dt). \quad (2.4)$$

При изучении дальнейших свойств условных математических ожиданий мы будем использовать оба варианта записи УМО — через σ -алгебры и через функции регрессии.

3 Пределный переход под знаком УМО

Существуют различные варианты условий, при которых можно переходить к пределу под знаком УМО (см., например, [1, теор. 2 §7 гл.2]). Приведем один из них, аналогичный теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

Предложение 3.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — некоторое вероятностное пространство и $\mathcal{F}_0$ — σ -алгебра, содержащаяся в $\mathcal{F}$. Рассмотрим последовательность случайных величин ξ_n и случайную величину ξ такие, что $\xi_n \rightarrow \xi$ п.в. и $|\xi_n| \leq \eta$ с $\mathbb{E}\eta < \infty$.

Тогда $\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_0) \rightarrow \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$ и $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi| | \mathcal{F}_0) \rightarrow 0$ с вероятностью 1.

⁵В примерах опущены доказательства того, что правые части (2.2) и (2.3) измеримы относительно $\sigma(T)$. Убедитесь в этом сами.

⁶Убедитесь в этом.

Доказательство. Заметим, что почти всюду $|\xi| \leq \eta$. Обозначим $\beta_n = \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi|$. Тогда с вероятностью 1 $\beta_n \downarrow 0$ и $\beta_n \leq 2\eta$ и, следовательно, $\mathbb{E}\beta_n \rightarrow 0$ по «обычной» теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Поэтому (здесь мы пользуемся⁷ Предложением 1.1)

$$|\mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_0) - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)| \leq \mathbb{E}(|\xi_n - \xi| | \mathcal{F}_0) \leq \mathbb{E}(\beta_n | \mathcal{F}_0) \downarrow \beta,$$

где β — некоторая $\mathbb{P}$ -п.в. неотрицательная случайная величина. При этом

$$0 \leq \mathbb{E}\beta \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(\beta_n | \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}\beta_n \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\mathbb{P}(\beta = 0) = 1$ и утверждение доказано. $\square$

Следствие 3.1. 1. Пусть $\eta_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \eta_i \uparrow \xi$ с вероятностью 1 и $\mathbb{E}\xi < \infty$. Тогда

$$\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i | \mathcal{F}_0\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(\eta_i | \mathcal{F}_0) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (3.1)$$

2. Пусть $\{A_i\}_{i \geq 1}$ — конечное или счетное семейство попарно непересекающихся событий и $A = \cup_{i \geq 1} A_i$. Тогда

$$\mathbb{P}(A | \mathcal{F}_0) = \mathbb{P}\left(\cup_{i \geq 1} A_i | \mathcal{F}_0\right) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i | \mathcal{F}_0) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (3.2)$$

3. Пусть $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (G, \mathcal{G})$, $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$ и $\{C_i\}_{i \geq 1}$ — последовательность попарно дизъюнктивных элементов $\mathcal{G}$. Тогда

$$\mathbb{P}(\xi \in \cup_{i \geq 1} C_i | T = t) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(\xi \in C_i | T = t) \quad \mathcal{P}_T\text{-п.в.} \quad (3.3)$$

Доказательство. Если обозначить $\xi_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \eta_i$ и положить $\eta = \xi$, то становится ясно, что первое утверждение непосредственно следует из Предложения 3.1.

Равенство (3.2) сводится к (3.1) выбором $\eta_i = \mathbb{I}_{A_i}$, а (3.3) — к (3.2) выбором $A_i = \xi^{-1}C_i$ и записью соответствующего равенства в регрессионной форме. $\square$

Замечание 3.1. Функцию $\mathbb{P}(\xi \in \cdot | T = t)$, определенную на σ -алгебре $\mathcal{G}$, хочется назвать условным распределением ξ при условии $T = t$. Действительно, из Предложения 1.1 следует, что $\mathcal{P}_T$ -почти всюду

$$\mathbb{P}(\xi \in G | T = t) = 1 \quad \text{и} \quad \mathbb{P}(\xi \in C | T = t) = 1 - \mathbb{P}(\xi \notin C | T = t)$$

для любого $C \in \mathcal{G}$. В то же время (3.1) имеет, казалось бы, смысл счетной аддитивности этой функции.

Здесь, однако, не все так просто. Дело в том, что в (3.1) исключительное множество (то есть то подмножество G , для которого (3.1) не выполняется) зависит, вообще говоря, от набора попарно дизъюнктивных множеств C_i , и для разных наборов C_i эти исключительные множества совпадать (и даже иметь непустое пересечение) не обязаны.

Поскольку интересующих нас наборов множеств C_i может быть очень много (это зависит от σ -алгебры $\mathcal{G}$), то, хотя каждое исключительное множество имеет нулевую меру, в принципе может оказаться, что не существует такого t , при котором равенство (3.1) выполнено для всех наборов C_i . Это, конечно, совсем не похоже на счетную аддитивность.

Решение этой проблемы связано с понятием регулярного варианта условного распределения, которое мы будем рассматривать в разделе 6.

⁷А как именно?

4 Дальнейшие свойства УМО

Как и раньше, рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и σ -алгебру $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$.

Предложение 4.1. 1. Пусть ξ и η — случайные величины такие, что ξ является $\mathcal{F}_0$ -измеримой, $\mathbb{E}|\eta| < \infty$ и $\mathbb{E}|\xi\eta| < \infty$. Тогда

$$\mathbb{E}(\xi\eta | \mathcal{F}_0) = \xi \mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (4.1)$$

В частности, если ξ суммируема и $\mathcal{F}_0$ -измерима, то $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) = \xi$ с вероятностью 1.
2. Если суммируемая случайная величина ξ и σ -алгебра $\mathcal{F}_0$ независимы,⁸ то

$$\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}\xi \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (4.2)$$

3. Рассмотрим σ -алгебры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ такие, что $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$. Если $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, то $\mathbb{P}$ -п.в.

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_1) | \mathcal{F}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_2) | \mathcal{F}_1) = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_1). \quad (4.3)$$

Доказательство. 1. Пусть $\xi = \mathbb{I}_B$, где $B \in \mathcal{F}_0$. Обозначим $\beta = \xi \mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0)$. Тогда при $A \in \mathcal{F}_0$ по определению УМО

$$\int_A \beta d\mathbb{P} = \int_{A \cap B} \mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0) d\mathbb{P} = \int_{A \cap B} \eta d\mathbb{P} = \int_A \xi \eta d\mathbb{P}.$$

Так как β является $\mathcal{F}_0$ -измеримой, то равенство (4.1) доказано для случая, когда ξ представляет собой индикатор $\mathcal{F}_0$ -измеримого множества. Используя Предложение 1.1, сразу же получаем, что (4.1) имеет место для простых $\mathcal{F}_0$ -измеримых⁹ функций ξ .

Перейдем теперь к общему случаю. Прежде всего заметим, что равенство (4.1) достаточно¹⁰ доказывать для неотрицательных ξ, η . Возьмем последовательность неотрицательных простых $\mathcal{F}_0$ -измеримых функций ξ_n таких, что поточечно $\xi_n \uparrow \xi$. Тогда $\xi_n \eta \uparrow \xi \eta$.

Как уже доказано,

$$\mathbb{E}(\xi_n \eta | \mathcal{F}_0) = \xi_n \mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (4.4)$$

Правая часть (4.4) стремится к $\xi \mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0)$, а левая, согласно Предложению 3.1, с вероятностью 1 к $\mathbb{E}(\xi \eta | \mathcal{F}_0)$. Тем самым первое утверждение доказано.

2. Так как $\mathbb{E} \mathbb{I}_A \xi = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}\xi$ при $A \in \mathcal{F}_0$, то утверждение следует из цепочки равенств

$$\int_A \mathbb{E}\xi d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}\xi = \int_A \xi d\mathbb{P}.$$

3. Поскольку $\xi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_1)$ является $\mathcal{F}_2$ -измеримой случайной величиной, то равенство

$$\mathbb{E}(\xi_1 | \mathcal{F}_2) = \xi_1 \quad \mathbb{P}\text{-п.в.}$$

является частным случаем (4.1).

Обозначим $\xi_2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_2) | \mathcal{F}_1)$ и возьмем $A \in \mathcal{F}_1$. Поскольку $A \in \mathcal{F}_2$, то

$$\int_A \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_2) d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P}.$$

Поэтому

$$\int_A \xi_2 d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_2) d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_1) d\mathbb{P}.$$

Следовательно, $\xi_2 = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_1)$ с вероятностью 1. Доказательство закончено. $\square$

⁸По определению это означает, что для любых $B \in \mathcal{B}_R$ и $A \in \mathcal{F}_0$ события A и $\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ независимы.

⁹то есть имеющих вид $\sum_{i=1}^m c_i \mathbb{I}_{B_i}$, где $B_i \in \mathcal{F}_0$

¹⁰Почему?

Замечание 4.1. Перепишем равенства (4.1) и (4.2) в регрессионных терминах и обсудим получившиеся результаты.¹¹

Если ввести отображение $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$ и положить $\mathcal{F}_0 = \sigma(T)$, то (4.1) автоматически переписывается как

$$\mathbb{E}(\varphi(T)\eta \mid T) = \varphi(T) \mathbb{E}(\eta \mid T) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.}, \quad (4.5)$$

где $\varphi(T)$ заменяет собой ξ . В регрессионных терминах (4.5) приобретет вид

$$\mathbb{E}(\varphi(T)\eta \mid T = t) = \mathbb{E}(\varphi(t)\eta \mid T = t) = \varphi(t) \mathbb{E}(\eta \mid T = t) \quad \mathcal{P}_T\text{-п.в.}, \quad (4.6)$$

что представляется совершенно естественным в рамках интерпретации функции регрессии, приведенной в Замечании 2.2. Действительно, если мы знаем, что $T = t$, то произведение $\varphi(T)\eta$ должно превратиться в $\varphi(t)\eta$, после чего постоянная¹² $\varphi(t)$ просто выносится за знак условного математического ожидания $\mathbb{E}(\varphi(t)\eta \mid T = t)$. В частности, «совершенно очевидно», что

$$\mathbb{E}(\varphi(T) \mid T = t) = \varphi(t),$$

иначе просто быть не может! А условие « $\mathcal{P}_T$ -п.в.» — это всего-навсего результат формализации интуитивно очевидного факта.

Из (4.6) сразу же следует (см. (2.4)), что

$$\mathbb{E}(\varphi(T)\eta) = \int_D \varphi(t) \mathbb{E}(\eta \mid T = t) \mathcal{P}_T(dt) \quad (4.7)$$

Это тождество еще будет обсуждаться в дальнейшем.

Что касается равенства (4.2), то при выборе $\mathcal{F}_0 = \sigma(T)$ независимость ξ и $\mathcal{F}_0$ означает всего лишь независимость ξ и T . Поэтому, переписав (4.2) в регрессионной форме

$$\mathbb{E}(\xi \mid T = t) = \mathbb{E}\xi \quad \mathcal{P}_T\text{-п.в.}, \quad (4.8)$$

мы снова приходим к интуитивной очевидности этого равенства: конечно, если ξ и T независимы, то знание значения T никак не влияет на нашу информацию о распределении (и, следовательно, о среднем значении) случайной величины ξ .

Теорема 4.1. (Неравенство Йенсена для УМО).

Рассмотрим, кроме вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, σ -алгебры $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ и случайной величины ξ с конечным математическим ожиданием, еще и измеримую функцию $\varphi : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$ такую, что $\mathbb{E}|\varphi(\xi)| < \infty$. Если функция φ выпукла вниз, то

$$\mathbb{E}(\varphi(\xi) \mid \mathcal{F}_0) \geq \varphi(\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_0)) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (4.9)$$

Доказательство. Опишем выпуклость функции φ следующим образом: для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$ через точку $(x_0, \varphi(x_0))$ можно провести такую прямую, что весь график функции $y = \varphi(x)$ будет находиться не ниже этой прямой.¹³ С формальной точки зрения это означает, что для любого x_0 существует такое $c = c(x_0)$, что

$$\varphi(x) \geq \varphi(x_0) + c(x_0)(x - x_0). \quad (4.10)$$

¹¹Сделайте то же самое для равенства (4.3), на которое чуть позже мы посмотрим с другой точки зрения.

¹²то есть не зависящая от ω

¹³В гладком случае, конечно, эта прямая является касательной к графику функции φ , в общем случае — одной из опорных прямых.

Равенства (4.10) уже достаточно для доказательства обычного неравенства Иенсена,¹⁴ доказывая (4.9), нам еще придется потрудиться.

Прежде всего, заметим,¹⁵ что функцию $z \mapsto c(z)$ можно выбрать $\mathcal{B}_R$ измеримой. Затем, подставив в (4.10) вместо x случайную величину ξ , а вместо x_0 — $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$, получим неравенство

$$\varphi(\xi) \geq \varphi(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) + c(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) (\xi - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)). \quad (4.11)$$

Если бы мы точно знали, что у правой части неравенства (4.11) есть конечное математическое ожидание, то взяв УМО относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_0$ от обеих частей (4.11), мы получили бы, используя Предложения 1.1 и 4.1, что $\mathbb{P}$ п.в.

$$\mathbb{E}(\varphi(\xi) | \mathcal{F}_0) \geq \varphi(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) + c(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) = \varphi(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)),$$

то есть необходимое нам утверждение. Однако, поскольку поведение (кроме постулированной измеримости) функции $c(x)$ нам, вообще говоря, неизвестно, такой путь не является корректным.

Введем обозначения

$$c_n(z) = \begin{cases} c(z) & \text{если } |c(z)| \leq n, \\ 0 & \text{если } |c(z)| > n, \end{cases}$$

$\Delta_n = c_n(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0))$ и $B_n = \{\omega : |\Delta_n| \leq n\}$. Тогда, очевидно, Δ_n является $\mathcal{F}_0$ -измеримой случайной величиной, $B_n \in \mathcal{F}_0$ и $B_n \uparrow \Omega$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, так как Δ_n ограничена, то, обозначая

$$\theta_n = \Delta_n \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) = \mathbb{I}_{B_n} c(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) (\xi - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)),$$

получим, что $\mathbb{P}$ п.в.

$$\mathbb{E}(\theta_n | \mathcal{F}_0) = \Delta_n \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) = 0,$$

и, следовательно, для любого $A \in \mathcal{F}_0$

$$\int_A \theta_n d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}(\theta_n | \mathcal{F}_0) d\mathbb{P} = 0.$$

Следовательно, возвращаясь к (4.11), видим, что для любого $A \in \mathcal{F}_0$

$$\int_{A \cap B_n} \varphi(\xi) d\mathbb{P} \geq \int_{A \cap B_n} \varphi(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) d\mathbb{P} + \int_{A \cap B_n} \theta_n d\mathbb{P} = \int_{A \cap B_n} \varphi(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) d\mathbb{P}.$$

Устремляя n к бесконечности, приходим к неравенству

$$\int_A \varphi(\xi) d\mathbb{P} \geq \int_A \varphi(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) d\mathbb{P},$$

которое, ввиду произвольности $A \in \mathcal{F}_0$, эквивалентно (4.9). □

Замечание 4.2. Конечно, в регрессионной форме неравенство Иенсена (4.9) имеет вид

$$\mathbb{E}(\varphi(\xi) | T = t) \geq \varphi(\mathbb{E}(\xi | T = t)) \quad \mathcal{P}_t\text{-п.в.} \quad (4.12)$$

¹⁴Для этого нужно подставить в (4.10) вместо x случайную величину ξ , вместо x_0 — ее среднее $\mathbb{E}\xi$, и взять математическое ожидание от обеих частей получившегося неравенства. В результате получим, что $\mathbb{E}\varphi(\xi) \geq \varphi(\mathbb{E}\xi)$.

¹⁵Точнее — примем этот факт, легко проверяемый в конкретных ситуациях, без доказательства.

5 УМО как оператор проектирования. Условная дисперсия

В этом разделе мы будем интерпретировать случайные величины (в том числе условные математические ожидания относительно σ -алгебр и отображений) как классы совпадающих почти всюду между собой функций, переходя тем самым на язык функционального анализа. Кроме того, мы будем предполагать, что $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$.

УМО как проектор. Как и раньше, зафиксируем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, σ -алгебру $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ и случайную величину ξ с конечным математическим ожиданием.

Пусть дополнительно $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Тогда мы можем рассматривать ξ как элемент Гильбертова пространства $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}) = \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ функций, измеримых относительно σ -алгебры $\mathcal{F}$ и имеющих конечные вторые моменты по мере $\mathbb{P}$. Как всегда, это пространство оснащено скалярным произведением $(\eta_1, \eta_2) = \int_{\Omega} \eta_1 \eta_2 d\mathbb{P}$.

Поскольку функция $\varphi(x) = x^2$ выпукла вниз, то для этой функции выполняется неравенство Иенсена, то есть

$$\left(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)\right)^2 \leq \mathbb{E}(\xi^2 | \mathcal{F}_0) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.}.$$

Беря математическое ожидание от обеих частей этого равенства, получим, что

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)\right)^2 \leq \mathbb{E}\mathbb{E}(\xi^2 | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}\xi^2.$$

Тем самым мы видим, что из условия $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F})$ следует, что $\xi' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F})$. При этом ξ' измерима относительно $\mathcal{F}_0$ и $\mathbb{E}\xi' = \mathbb{E}\xi$, так что $\mathbb{D}\xi' \leq \mathbb{D}\xi$.

Эти свойства имеют простое объяснение. Рассмотрим множество $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$ функций, измеримых относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_0$ и имеющих конечные вторые моменты. Очевидно, $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0) \subset \mathbb{L}^2(\mathcal{F})$, причем $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$ является замкнутым линейным подпространством $\mathbb{L}^2(\mathcal{F})$.

Предложение 5.1. Если $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, то условное математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$ является результатом ортогонального проектирования в $\mathbb{L}^2(\mathcal{F})$ функции ξ на $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$.

Доказательство. Случайная величина $\xi' \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$ является ортогональной проекцией ξ на подпространство $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$ тогда и только тогда, когда $\xi - \xi'$ ортогональна η для любой $\eta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$. Проверим это свойство, выбрав $\xi' = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$. Действительно,

$$\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0))\eta = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}(\eta\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi\eta | \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\eta = 0.$$

Доказательство закончено. □

Замечание 5.1. 1. Обозначим $\xi' = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$. Поскольку для любой $\eta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi - \eta)^2 &= \mathbb{E}((\xi - \xi') + (\xi' - \eta))^2 = \\ &= \mathbb{E}(\xi - \xi')^2 + \mathbb{E}(\xi' - \eta)^2 + \mathbb{E}(\xi - \xi')(\xi' - \eta) = \mathbb{E}(\xi - \xi')^2 + \mathbb{E}(\xi' - \eta)^2 \geq \mathbb{E}(\xi - \xi')^2, \end{aligned}$$

то, кроме «геометрической» интерпретации УМО суммируемой с квадратом случайной величины ξ относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_0$, мы получаем и «оптимизационную» интерпретацию:

$$\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0))^2 = \min_{\eta \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0)} \mathbb{E}(\xi - \eta)^2. \quad (5.1)$$

2. Наиболее выпукло последнее свойство проявляется в регрессионной постановке. Пусть $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F})$ и $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$. Как нам выбрать функцию $\varphi : (D, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$, чтобы случайная величина $\varphi(T)$ наилучшим образом аппроксимировала ξ в среднеквадратическом?

Ответ содержится в (5.1): искомая функция φ совпадает с функцией регрессии $\mathbb{E}(\xi | T = t)$, а сама случайная величина $\varphi(T)$ — с условным математическим ожиданием $\mathbb{E}(\xi | T)$.

3. В случае, когда $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, равенство (4.3) Предложения 4.1 приобретает понятный геометрический смысл. Действительно, поскольку $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_1) \subset \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_2) \subset \mathbb{L}^2(\mathcal{F})$, то не важно, в каком порядке проектировать ξ на $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_1)$ и $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_2)$ — результатом все равно будет проекция ξ на меньшее из этих подпространств.

Условная дисперсия. Основное дисперсионное тождество. Требование конечности второго момента у случайной величины ξ позволяет ввести понятия не только условного математического ожидания, но и условной дисперсии относительно σ -алгебры. Но сначала дадим следующее определение.

Определение 5.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство. События $A_1, \dots, A_n$ называются *условно независимыми относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$* , если

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n | \mathcal{F}_0) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i | \mathcal{F}_0) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.} \quad (5.2)$$

Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются *условно независимыми относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$* , если для любых борелевских множеств $B_1, \dots, B_n$ события $\{\omega : \xi_i(\omega) \in B_i\}$ являются условно независимыми.

Замечание 5.2. Регрессионный вариант равенств, определяющих условную независимость случайных величин, очевидно, имеет вид

$$\mathbb{P}(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n | T = t) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(\xi_i \in B_i | T = t) \quad \mathcal{P}_T\text{-п.в.},$$

где $B_i \in \mathcal{B}_R$. Этот вариант делает определение интуитивно очевидным. Пусть, например, α_1, α_2 и T — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $(0, 1]$. Положим $\xi_1 = \alpha_1 T$ и $\xi_2 = \alpha_2 T$. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 , конечно, зависимы, но при условии $T = t$ они независимы и равномерно распределены на $(0, t]$.

Лемма 5.1. Пусть ξ и η условно независимы при условии $\mathcal{F}_0$. Если $\mathbb{E}|\xi| < \infty$, $\mathbb{E}|\eta| < \infty$ и $\mathbb{E}|\xi\eta| < \infty$, то $\mathbb{P}$ -п.в.

$$\mathbb{E}(\xi\eta | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0) \mathbb{E}(\eta | \mathcal{F}_0). \quad (5.3)$$

Доказательство. Приведем лишь краткую схему доказательства, которое во многом аналогично доказательству первого пункта Предложения 4.1.

Прежде всего, если ξ и η представляют собой индикаторы $\mathcal{F}$ -измеримых множеств, то (5.3) следует из (5.2). Отсюда сразу же следует равенство (5.3) для простых условно-независимых случайных величин.

Переход к общему случаю тоже делается стандартным образом. Заметив, что (5.3) достаточно доказывать для неотрицательных ξ и η , нужно аппроксимировать их снизу простыми случайными величинами, а затем применить Предложение 3.1 о предельном переходе под знаком УМО. $\square$

Определение 5.2. Пусть $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$. Условной дисперсией случайной величины ξ относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_0$ называется случайная величина $\mathbb{D}(\xi | \mathcal{F}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0))^2 | \mathcal{F}_0\right)$.

Условная дисперсия обладает следующими свойствами, выполняющимися $\mathbb{P}$ -п.в.

Предложение 5.2. Пусть ξ и η Обладают вторыми конечными моментами. Тогда

1. $\mathbb{D}(\xi | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\xi^2 | \mathcal{F}_0) - (\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0))^2$;
2. условная дисперсия $\mathbb{D}(\xi | \mathcal{F}_0)$ неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда ξ является $\mathcal{F}_0$ -измеримой;
3. для любых $\mathcal{F}_0$ -измеримых a и b таких, что $\mathbb{E}|b| < \infty$ и $\mathbb{E}a^2|\xi| < \infty$

$$\mathbb{D}(a\xi + b | \mathcal{F}_0) = a^2 \mathbb{D}(\xi | \mathcal{F}_0) \quad \mathbb{P}\text{-п.в.};$$

4. если ξ и η условно независимы при условии $\mathcal{F}_0$, то $\mathbb{D}(\xi + \eta | \mathcal{F}_0) = \mathbb{D}(\xi | \mathcal{F}_0) + \mathbb{D}(\eta | \mathcal{F}_0)$ $\mathbb{P}$ -п.в.

Доказательство. Доказательство этого утверждения повторяет (с учетом свойств условных математических ожиданий) доказательство аналогичных свойств обычной дисперсии и поэтому опускается. $\square$

Предложение 5.3. Если $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, то имеет место равенство

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\mathbb{D}(\xi | \mathcal{F}_0)) + \mathbb{D}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)). \quad (5.4)$$

Доказательство. Действительно,

$$\mathbb{E}(\mathbb{D}(\xi | \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi^2 | \mathcal{F}_0)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0))^2 = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0))^2$$

и

$$\mathbb{D}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0))^2 - (\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)))^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0))^2 - \mathbb{E}\xi^2.$$

Складывая эти два равенства, получаем (5.4). $\square$

Равенство (5.4) называется *основным дисперсионным тождеством*. Для краткости его иногда записывают в виде $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\mathbb{D}_{\mathcal{F}_0}(\xi) + \mathbb{D}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}(\xi)$.

Замечание 5.3. Равенство (5.4) имеет простой геометрический смысл. Во-первых, числа $\mathbb{D}\xi$, $\mathbb{E}\mathbb{D}_{\mathcal{F}_0}(\xi)$ и $\mathbb{D}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}(\xi)$ не изменятся,¹⁶ если ξ заменить на $\xi - \mathbb{E}\xi$. Следовательно, можно считать для простоты, что $\mathbb{E}\xi = 0$.

Далее, при этом условии $\mathbb{D}\xi$ — это квадрат нормы элемента ξ пространства $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}^2$. Точно также $\mathbb{D}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}(\xi)$ является квадратом нормы проекции $\xi' = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)$ случайной величины ξ на подпространство $\mathbb{L}_{\mathcal{F}_0}^2$. Поскольку $\xi - \xi'$ ортогонально ξ' , а

$$\mathbb{E}\xi\xi' = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi\xi' | \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(\xi'\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}(\xi')^2$$

и поэтому

$$\mathbb{E}(\xi - \xi')^2 = \mathbb{E}\xi^2 - 2\mathbb{E}\xi\xi' + \mathbb{E}(\xi')^2 = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}(\xi')^2 = \mathbb{E}\mathbb{D}_{\mathcal{F}_0}(\xi),$$

то (5.4) представляет собой просто-напросто вариант теоремы Пифагора в $\mathbb{L}_{\mathcal{F}}^2$:

$$\|\xi\|_2^2 = \|\xi - \xi'\|_2^2 + \|\xi'\|_2^2.$$

Пусть σ -алгебра $\mathcal{F}_0 = \sigma(T)$ порождается отображением $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$. Тогда с условной дисперсией связано понятие *корреляционного отношения*, определяемого как

$$r^2(\xi | T) = 1 - \frac{\mathbb{E}\mathbb{D}_T(\xi)}{\mathbb{D}\xi} = \frac{\mathbb{D}\mathbb{E}_T(\xi)}{\mathbb{D}\xi},$$

где обозначения $\mathbb{D}\mathbb{E}_T(\xi)$ и $\mathbb{E}\mathbb{D}_T(\xi)$ используются вместо $\mathbb{E}\mathbb{D}_{\mathcal{F}_0}(\xi)$ и $\mathbb{D}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}(\xi)$. Корреляционное отношение является мерой зависимости¹⁷ ξ и T : оно неотрицательно, не превосходит 1, равно 0 в случае, когда ξ и T независимы и принимает значение 1, если ξ является $\sigma(T)$ -измеримой случайной величиной.

¹⁶Проверьте!

¹⁷а не просто линейной зависимости, как коэффициент корреляции! Кстати, аналогом корреляционного отношения является не коэффициент корреляции, а его квадрат.

6 Регулярные варианты условных распределений

В разделе 3 (см. Замечание 3.1) обсуждались сложности, связанные с формализацией (интуитивно очевидного) понятия «условного распределения относительно отображения». В этом разделе будет указан способ разрешения этих сложностей.

Определение 6.1. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и два измеримых пространства $(D, \mathcal{A})$ и $(E, \mathcal{E})$. Пусть $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (E, \mathcal{E})$ и $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$.

Функция $Q : \mathcal{E} \times D \mapsto \mathbb{R}$ называется *регулярным вариантом условного распределения ξ относительно T* , если

1. для любого $t \in D$ функция $Q(\cdot; t)$ является вероятностной мерой;
2. для любого $A \in \mathcal{E}$ функция $Q(A; \cdot)$ является $\mathcal{A}$ -измеримой;
3. для любого $A \in \mathcal{E}$

$$Q(A; t) = \mathbb{P}(\xi \in A | T = t) \quad \mathcal{P}_T\text{-п.в.} \quad (6.1)$$

Замечание 6.1. 1. Если $(E, \mathcal{E}) = (\Omega, \mathcal{F})$ и $\xi(\omega) = \omega$, то функция Q называется *регулярным вариантом условной вероятности при относительно отображения T* .

2. Если ξ и T независимы, то $Q(A; t) = \mathbb{P}(\xi \in A)$ при любом t . Это сразу же следует из равенства (4.8) (см. Замечание 4.1 к Предложению 4.1).

Полезность введения понятия регулярного варианта условного распределения сразу следует из следующего утверждения.

Предложение 6.1. Рассмотрим в условиях Определения 6.1 функцию $g : (E, \mathcal{E}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$ такую, что $\mathbb{E}|g(\xi)| < \infty$. Тогда

$$\mathbb{E}(g(\xi) | T = t) = \int_{\mathbb{E}} g(x) Q(dx; t) \quad \mathcal{P}_T\text{-п.в.} \quad (6.2)$$

и

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_D \mathcal{P}_T(dt) \int_E g(x) Q(dx; t). \quad (6.3)$$

Доказательство. При $A \in \mathcal{E}$ и $g = \mathbb{I}_A$ равенство (6.2) превращается в (6.1). Поэтому (6.2) имеет место для любой простой функции g . Дальше все стандартно: рассматриваем неотрицательные функции g , берем последовательность простых функций g_n таких, что поточечно $g_n \uparrow g$ и переходим к пределу под знаком как обычного интеграла (в правой части (6.2)) так и под знаком условной вероятности (в левой части (6.2)).

Что касается (6.3), то

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_D \mathcal{P}_T(dt) \mathbb{E}(g(\xi) | T = t)$$

и остается воспользоваться (6.2). □

Замечание 6.2. 1. Число $Q(A; t)$, конечно же, имеет смысл вероятности события $\xi \in A$ при условии, что отображение T приняло значение t .

2. Формула (6.3) представляет собой обобщение элементарной формулы полной вероятности¹⁸: имеется двухэтапный эксперимент, на первом этапе которого измеряется значение T , а на втором — ξ , причем распределение ξ зависит от уже известного значения T . Если эта зависимость выражается регулярным вариантом Q условного распределения, то вся информация о распределении ξ записывается в виде (6.3).

3. Из (6.3), в частности, следует, что распределения случайных величин ξ и η совпадают, если совпадают их регулярные варианты распределений относительно одного и того же отображения T .¹⁹

¹⁸Вернее, «полного математического ожидания»

¹⁹Почему?

Приведем еще один пример использования понятия регулярного варианта условного распределения, связанный с основным дисперсионным тождеством.

Предложение 6.2. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и измеримое отображение $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — случайные величины, обладающие следующими свойствами:

1. $\mathbb{E}\xi_i^2 < \infty$ при $1 \leq i \leq n$;
2. $\xi_1, \dots, \xi_n$ условно независимы при условии T ;
3. Существуют совпадающие регулярные варианты $Q_i(dx; t) = Q(dx; t)$ условных распределений ξ_i относительно T .

Запишем основное дисперсионное тождество для случайной величины $\xi = \xi_1$ в виде $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\mathbb{D}_T(\xi) + \mathbb{D}\mathbb{E}_T(\xi)$. Тогда

$$\mathbb{D}\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}\mathbb{D}_T(\xi)}{n} + \mathbb{D}\mathbb{E}_T(\xi).$$

Доказательство. Обозначим $\eta_n = (\xi_1 + \dots + \xi_n)/n$. Тогда $\mathbb{D}\eta_n = \mathbb{E}\mathbb{D}_T(\eta_n) + \mathbb{D}\mathbb{E}_T(\eta_n)$. Поскольку согласно (6.2)

$$\mathbb{E}(\xi_i | T = t) = \int_{\mathbb{R}} x Q_i(dx; t) = \int_{\mathbb{R}} x Q(dx; t) = \mathbb{E}(\xi | T = t) \quad \mathcal{P}_{T\text{-п.в.}},$$

то $\mathbb{E}(\eta_n | T) = \mathbb{E}(\xi | T)$ с вероятностью 1 и $\mathbb{D}\mathbb{E}_T(\eta_n) = \mathbb{D}\mathbb{E}_T(\xi)$.

С другой стороны, так как случайные величины ξ_i условно независимы при условии T , то, согласно Предложению 5.2, с вероятностью 1

$$\mathbb{D}(\eta_n | T) = n^{-2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D}(\xi_i | T) = n^{-1} \mathbb{D}(\xi | T),$$

причем последний переход обосновывается точно так же, как равенство $\mathbb{E}(\eta_n | T) = \mathbb{E}(\xi | T)$. Утверждение доказано. $\square$

Перейдем теперь к вопросам существования регулярных вариантов условных распределений. Начнем с двух частных случаев.

Предложение 6.3. 1. Пусть в условиях Определения 6.1 $D = \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ является конечным или счетным множеством, а σ -алгебра $\mathcal{A}$ состоит из всех подмножеств множества D . Предположим дополнительно, что $\mathbb{P}(T = t_i) > 0$ при всех i . Тогда существует регулярный вариант $Q(dx; t)$ условного распределения ξ относительно T , который имеет вид

$$Q(A; t_i) = \frac{\mathbb{P}(\xi \in A, T = t_i)}{\mathbb{P}(T = t_i)}.$$

2. Пусть совместное распределение пары отображений (ξ, T) имеет плотность $p(x, t)$ относительно меры $\mu(dx) \otimes \nu(dt)$, определенной на σ -алгебре $\mathcal{E} \times \mathcal{A}$ подмножеств множества $E \times D$. Обозначим

$$p_T(t) = \int_{\mathbb{R}} p(x, t) \mu(dx).$$

Тогда существует регулярный вариант $Q(dx; t)$ условного распределения ξ относительно T , имеющий вид

$$Q(A; t) = \begin{cases} \frac{\int_A p(x, t) \mu(dx)}{p_T(t)} & \text{если } p_T(t) \neq 0, \\ \mathbb{P}(\xi \in A) & \text{если } p_T(t) = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Доказательство. При доказательстве по существу повторяются рассуждения Примера 2.1 (раздел 2). Кратко покажем это для второго утверждения. Прежде всего, правая часть (6.4) удовлетворяет первым двум условиям Определения 6.1. Осталось проверить третье условие.

Согласно (2.1) это означает, что для любого $B \in \mathcal{A}$ должно выполняться равенство

$$\int_{T^{-1}B} \mathbb{I}_A(\xi) d\mathbb{P} = \int_B Q(A; t) \mathcal{P}_T(dt). \quad (6.5)$$

Левая часть (6.5), очевидно, равна $\mathbb{P}(\xi \in A, T \in B)$. Что касается правой части, обозначим $D_0 = \{t : p_T(t) \neq 0\}$ и заметим, что $\mathbb{P}(T \in D_0) = 1$. Поскольку $\mathcal{P}_T(dt) = p_T(t)\nu(dt)$, то имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} & \int_{B \cap D_0} \left(\int_A \frac{p(x, t) \mu(dx)}{p_T(t)} \right) \mathcal{P}_T(dt) + \int_{B \cap D_0^c} \mathbb{P}(\xi \in A) \mathcal{P}_T(dt) = \\ & = \int_{B \cap D_0} \left(\int_A p(x, t) \mu(dx) \right) \nu(dt) = \mathbb{P}(\xi \in A, T \in B \cap D_0) = \mathbb{P}(\xi \in A, T \in B). \end{aligned}$$

Утверждение доказано. $\square$

Замечание 6.3. Конечно, в правой части (6.5) для случая $p_T(t) = 0$ может стоять любое распределение, определенное на σ -алгебре $\mathcal{A}$.

Хотя Предложение 6.3 охватывает широкий класс ситуаций, в которых существуют регулярные варианты условных распределений (и дает принципиальную возможность их выписывать), хочется иметь для этого общие условия, не связанные с дискретностью или абсолютной непрерывностью распределений. Сформулируем без доказательства соответствующее утверждение.²⁰

Теорема 6.1. Пусть $(E, \rho, \mathcal{E})$ — полное метрическое сепарабельное пространство с борелевской σ -алгеброй. Если ξ — случайная величина со значениями в $(E, \mathcal{E})$, то для любого измеримого пространства $(D, \mathcal{A})$ и любого отображения $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D, \mathcal{A})$ существует регулярный вариант условного распределения ξ относительно T .

Из Теоремы 6.1, в частности, следует, что существует регулярный вариант условного распределения любого случайного вектора со значениями в евклидовом пространстве любой размерности.

7 Теорема о монотонном классе. Применение к УМО

Для дальнейшего изучения свойств условных распределений нам понадобится следующее определение.

Определение 7.1. Система подмножеств $\mathcal{M}$ некоторого множества E называется *монотонным классом*, если она замкнута относительно счетных монотонных объединений и пересечений. Иначе говоря, $\mathcal{M}$ должна обладать следующими свойствами:

1. если $A_i \in \mathcal{M}$ и $A_i \subset A_{i+1}$, то $\bigcup_i A_i \in \mathcal{M}$;
2. если $A_i \in \mathcal{M}$ и $A_i \supset A_{i+1}$, то $\bigcap_i A_i \in \mathcal{M}$.

Очевидно, любая σ -алгебра является монотонным классом. Обратное, конечно, неверно.²¹

Лемма 7.1. 1. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторая система подмножеств множества E . Рассмотрим всевозможные монотонные классы, содержащие $\mathcal{E}$ и состоящие из подмножеств множества E . Тогда среди этих классов существует минимальный.

2. Пусть $\mathcal{E}$ — некоторая алгебра подмножеств множества E . Для того, чтобы $\mathcal{E}$ была σ -алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{E}$ было монотонным классом.

²⁰ Доказательство (чуть-чуть в другой формулировке) можно найти в [1, гл. II §7].

²¹ Почему?

Доказательство. 1. Прежде всего, семейство монотонных классов, содержащих $\mathcal{E}$, не пусто, так как туда входит множество всех подмножеств E , являющееся σ -алгеброй. Рассмотрим пересечение всех этих монотонных классов (оно снова не пусто, так как содержит $\mathcal{E}$) и обозначим это пересечение $\mathcal{M}$. Это $\mathcal{M}$ и будет искомым минимальным монотонным классом.²²

2. Так как $\mathcal{E}$ уже является алгеброй, достаточно показать, что $\mathcal{E}$ замкнуто относительно счетных объединений. Пусть $A_i \in \mathcal{E}$, $i \geq 1$ Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup \dots,$$

откуда немедленно следует требуемое. $\square$

Теорема 7.1. (теорема о монотонном классе.)²³

Пусть $\mathcal{E}$ — алгебра подмножеств множества E и $\sigma(\mathcal{E})$ — минимальная σ -алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. Если монотонный класс $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию $\mathcal{E} \subset \mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{E})$, то $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{E})$.

Доказательство. Прежде всего, можно ограничиться случаем, когда $\mathcal{M}$ — минимальный монотонный класс, содержащий $\mathcal{E}$. Кроме того, согласно Лемме 7.1 нам достаточно показать, что $\mathcal{M}$ является алгеброй.

Действительно, $E \in \mathcal{M}$ так как $\mathcal{M}$ содержит алгебру $\mathcal{E}$. Докажем, что $\mathcal{M}$ замкнут относительно дополнений. Обозначим

$$\mathcal{M}^* = \{A \subset E : A \in \mathcal{M} \text{ и } A^c \in \mathcal{M}\}$$

и докажем, что $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$. По определению $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$. Поэтому (так как $\mathcal{M}$ минимальный монотонный класс) нам достаточно доказать, что $\mathcal{M}^*$ является монотонным классом.

Пусть $A_i \in \mathcal{M}^*$ и $A_i \uparrow A$. Тогда $A \in \mathcal{M}$ (так как $A_i \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ — монотонный класс). Кроме того, $A_i^c \downarrow A^c \in \mathcal{M}$, так как $A_i^c \in \mathcal{M}$ и $A_i^c \supset A_{i+1}^c$. Тем самым $A \in \mathcal{M}^*$ и $\mathcal{M}^*$ — монотонный класс.

Осталось доказать, что $\mathcal{M}$ замкнут относительно конечных объединений. Доказательство будет проходить в два аналогичных этапа. Сначала возьмем $A \in \mathcal{E}$, обозначим

$$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M} : A \cup B \in \mathcal{M}\}$$

и покажем, что $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$.

Очевидно, $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}$ (это по определению) и $\mathcal{M}_A \supset \mathcal{E}$ (так как $\mathcal{E}$ — алгебра). Кроме того, $\mathcal{M}_A$ — монотонный класс. Действительно, пусть $B_n \in \mathcal{M}_A$ и $B_n \uparrow B$. Так как $A \cap B_n \uparrow A \cap B$ и $A \cap B_n \in \mathcal{M}$, то $A \cap B \in \mathcal{M}$ (для убывающих $B_n \in \mathcal{M}_A$ все аналогично).

Следовательно, так как $\mathcal{M}$ — минимальный монотонный класс, $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$ и $A \cup B \in \mathcal{M}$ при любых $A \in \mathcal{E}$ и $B \in \mathcal{M}$.

Пусть теперь $A \in \mathcal{M}$, и $\mathcal{M}^A = \{B \in \mathcal{M} : A \cup B \in \mathcal{M}\}$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $\mathcal{M}^A = \mathcal{M}$. Это происходит повторением предыдущих рассуждений: $\mathcal{M}^A \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{M}^A \supset \mathcal{E}$ (для доказательства этого факта и нужен первый этап) и $\mathcal{M}^A$ — монотонный класс. $\square$

Следующее утверждение, важное для работы с УМО, иллюстрирует стиль применения теоремы о монотонном классе.

Предложение 7.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — некоторое вероятностное пространство, $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D_1, \mathcal{D}_1)$, $T : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (D_2, \mathcal{D}_2)$ и $f : (D_1 \times D_2, \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$. Если $\mathbb{E}|f(\xi, T)| < \infty$, то

$$\mathbb{E}(f(\xi, T) | T = t) = \mathbb{E}(f(\xi, t) | T = t) \quad \mathcal{P}_T\text{-н.в.} \quad (7.1)$$

²²Проверьте это.

²³Другие варианты этой теоремы вместе с обсуждением см. в [1, гл. II §2].

Доказательство. Согласно (4.6), равенство (7.1) верно в случае, когда $f(x, t) = f_1(x)f_2(t)$ (и выполняются естественные условия суммируемости, необходимые для (4.6)). В частности, это имеет место при $f(x, t) = \mathbb{I}_{A \times B}(x, t)$, где $A \in \mathcal{D}_1$ и $B \in \mathcal{D}_2$. Отсюда сразу же следует,²⁴ что (7.1) выполняется для $f(x, t) = \mathbb{I}_{C_0}(x, t)$, где C_0 — любой элемент алгебры $\mathcal{E}$, порожденной «ячейками» $A \times B$ с $A \in \mathcal{D}_1$ и $B \in \mathcal{D}_2$.

Докажем, что (7.1) имеет место для $f(x, t) = \mathbb{I}_C(x, t)$, где $C \in \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$. Иначе говоря, докажем равенство

$$\mathbb{P}((\xi, T) \in C | T = t) = \mathbb{P}((\xi, t) \in C | T = t) \quad \mathcal{P}_T\text{-п.в.},$$

которое эквивалентно тому, что

$$\mathbb{P}((\xi, T) \in C, T \in B) = \int_B \mathbb{P}((\xi, t) \in C | T = t) \mathcal{P}_T(dt) \quad (7.2)$$

для любого $B \in \mathcal{D}_2$. Мы уже знаем, что (7.2) верно при $C \in \mathcal{E}$. С другой стороны, по определению $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \sigma(\mathcal{E})$. Поэтому, согласно Теореме 7.1 достаточно показать, что семейство $\mathcal{M}$ множеств C , для которых выполнено (7.2), является монотонным классом.

Поскольку, как нетрудно видеть,²⁵ $\mathcal{M}$ замкнуто относительно дополнений, нужно разобраться лишь с монотонностью «по возрастанию». Здесь тоже нет проблем: левая часть (7.2) замкнута относительно предельного перехода при $C_n \uparrow C$ по свойству меры, а правая — согласно Предложению 3.1 о предельном переходе под знаком УМО.

Дальнейшее стандартно (см. доказательство первого утверждения Предложения 4.1): в равенстве (7.1) мы переходим от индикаторов (для них оно доказано) к простым функциям f , затем (снова предельный переход под знаком УМО) — к неотрицательным суммируемым функциям и, наконец, избавляемся от условия неотрицательности. $\square$

Следствие 7.1. Если в условиях Предложения 7.1 существует регулярный вариант $Q(dx; t)$ условного распределения ξ при условии T , то

$$\mathbb{E}(f(\xi, T) | T = t) = \int_{D_1} f(x, t) Q(dx; t) \quad \mathcal{P}_T\text{-п.в.} \quad (7.3)$$

и

$$\mathbb{E}f(\xi, T) = \int_{D_2} \mathcal{P}_T(dt) \int_{D_1} f(x, t) Q(dx; t). \quad (7.4)$$

Доказательство. Для доказательства (7.3) используем (7.1). Правая часть последнего равенства имеет вид $\mathbb{E}(g(\xi) | T = t)$, где (при фиксированном t) $g(\xi) = f(\xi, t)$. Применяя (6.2), получаем (7.3). Что касается (7.4), то это равенство следует из (6.3). $\square$

Список литературы

- [1] А.Н. Ширяев (2004), Вероятность-1, М., Изд-во МЦНМО.

²⁴Проверьте!

²⁵Действительно?